

Wstęp do nierówności kwadratowych

Żeby nauczyć się rozwiązywać nierówności kwadratowe, to warto wcześniej nauczyć się rozwiązywać równania kwadratowe i rysować wykresy funkcji kwadratowych.

Czym różni się równanie kwadratowe od nierówności kwadratowej?

W równaniach kwadratowych występuje znak równości (=).

W nierównościach występuje jeden ze znaków nierówności (<, ≤, >, ≥).

$x^2 - 2x - 8 = 0$	$x^2 - 2x - 8 < 0$
↑	↑
równanie kwadratowe	nierówność kwadratowa

Równanie kwadratowe może mieć jedno, dwa, lub zero rozwiązań.

Rozwiązaniem nierówności kwadratowej jest zazwyczaj przedział liczbowy.

$x^2 - 2x - 8 = 0$	$x^2 - 2x - 8 < 0$
⋮	⋮
$x = 4 \vee x = -2$	$x \in (-2, 4)$
↙ ↘	↑
dwa rozwiązania równania kwadratowego	przedział liczbowy będący rozwiązaniem nierówności kwadratowej

Metoda

Metodę rozwiązywania nierówności kwadratowej można zapisać w czterech krokach:

1. wszystkie wyrazy przenosimy na lewą stronę nierówności, tak aby po prawej zostało tylko 0 ,
2. lewą stronę nierówności traktujemy jako wzór funkcji kwadratowej,
3. wyznaczamy miejsca zerowe tej funkcji kwadratowej (o ile istnieją) i szkicujemy jej wykres,
4. odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności.

Przykład 1.

Rozwiąż nierówność $x^2 + 4x + 3 < 0$.

Rozwiązanie:

Lewą stronę nierówności traktujemy jak funkcję kwadratową:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

Wyznaczamy miejsca zerowe tej funkcji. Najpierw liczymy deltę:

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

Czyli:

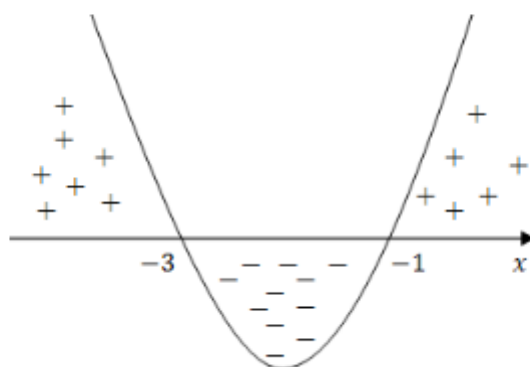
$$\sqrt{\Delta} = 2$$

Zatem miejsca zerowe, to:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2}{2 \cdot 1} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 2}{2 \cdot 1} = -1$$

Teraz szkicujemy wykres paraboli:



Ramiona paraboli będą skierowane do góry, ponieważ współczynnik liczbowy przy x^2 jest dodatni.

Z rysunku odczytujemy, że parabola przyjmuje wartości mniejsze od zera dla:

$$x \in (-3, -1)$$

Zadanie:

Rozwiąż nierówność $x^2 + 4x + 3 \leq 0$.